

Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Δειγματικό Διαγώνισμα 01

Άσκηση 1.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx, \quad x = 4\eta\mu\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άσκηση 2.

Αν $\int_{-2}^1 f(x)dx = 3$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \int_{-2}^1 \frac{5x^2 f(x)}{x^2 + 2} dx - 10 \int_1^{-2} \frac{f(x)}{x^2 + 2} dx$$

Άσκηση 3.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Delta$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$$

Άσκηση 4.

Δίνεται η παραβολή $y = \frac{x^2}{4}$ και τα σημεία $M_1(6,9)$, $M_2(-2,1)$ σημεία της. Από τα σημεία M_1, M_2 φέρουμε εφαπτόμενες προς την παραβολή.

- (α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων και να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των εφαπτομένων είναι $A(2, -3)$.
- (β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις εφαπτομένες στα σημεία M_1, M_2 .

Άσκηση 5.

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες την καμπύλη $y = \ln(x)$ και την ευθεία $y = 2$ στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των X .

Άσκηση 6.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x \cdot f(x^2) dx = 0$$

Άσκηση 7.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^\pi x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta \mu x) dx$ με χρήση του μετασχηματισμού $x = \pi - t$.

(β) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^\pi f(\eta \mu x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$ με χρήση του μετασχηματισμού $a - x = t$.

(δ) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να αποδείξετε ότι: $\int_0^\pi \frac{x \eta \mu^4 x}{\eta \mu^4 x + \sigma \nu \nu^4 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Δειγματικό Διαγώνισμα 01

Άσκηση 1.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx, \quad x = 4\eta\mu\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\bullet x = 4\eta\mu\theta \Rightarrow dx = 4\sigma\eta\theta d\theta$$

$$x = 0 \Rightarrow 4\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$x = 2\sqrt{3} \Rightarrow 4\eta\mu\theta = 2\sqrt{3} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\bullet \sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-16\eta^2\theta} = \sqrt{16(1-\eta^2\theta)} = \sqrt{16\sigma^2\theta} = 4|\sigma\eta\theta| = 4\sigma\eta\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sigma\eta\theta \geq 0$$

$$\bullet \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cancel{4\sigma\eta\theta}} \cdot \cancel{4\sigma\eta\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 d\theta = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

Άσκηση 2.

Αν $\int_{-2}^1 f(x) dx = 3$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \int_{-2}^1 \frac{5x^2 f(x)}{x^2 + 2} dx - 10 \int_1^{-2} \frac{f(x)}{x^2 + 2} dx$$

$$A = \int_{-2}^1 \frac{5x^2 \cdot f(x)}{x^2 + 2} dx + \int_{-2}^1 \frac{10 \cdot f(x)}{x^2 + 2} dx =$$

$$= \int_{-2}^1 \left[\frac{5x^2 \cdot f(x)}{x^2 + 2} + \frac{10 \cdot f(x)}{x^2 + 2} \right] dx =$$

$$= \int_{-2}^1 \frac{5x^2 \cdot f(x) + 10 \cdot f(x)}{x^2 + 2} dx = \int_{-2}^1 \frac{5 \cdot f(x) \cdot \cancel{(x^2 + 2)}}{\cancel{(x^2 + 2)}} dx$$

$$= 5 \int_{-2}^1 f(x) dx = 5 \cdot 3 = 15$$

Άσκηση 3.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Delta$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx$$

α' ηχος: $\int_a^b f(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx =$

$= \int_a^{\delta} f(x) dx + \int_{\delta}^b f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx =$

$= \int_a^{\delta} f(x) dx + \int_{\gamma}^b f(x) dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx =$

$= \int_a^{\delta} f(x) dx + \int_{\gamma}^b f(x) dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x) dx =$

$= \int_a^{\delta} f(x) dx + \int_{\gamma}^b f(x) dx = \text{β' ηχος}$

Άσκηση 4.

Δίνεται η παραβολή $y = \frac{x^2}{4}$ και τα σημεία $M_1(6,9)$, $M_2(-2,1)$ σημεία της. Από τα σημεία M_1, M_2 φέρουμε εφαπτόμενες προς την παραβολή.

(α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων και να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των εφαπτομένων είναι $A(2, -3)$.

(β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις εφαπτομένες στα σημεία M_1, M_2 .

$$(α) \quad y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow y' = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

$$\bullet \quad \lambda_{\text{εφ}} = \frac{6}{2} = 3, \quad M_1(6,9)$$

$$\text{Εφαπτομένη στο } M_1: y - y_1 = \lambda \cdot (x - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 9 = 3 \cdot (x - 6) \Rightarrow y - 9 = 3x - 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 3x - 9$$

$$\bullet \quad \lambda_{\text{εφ}} = \frac{-2}{2} = -1 \quad M_2(-2,1)$$

$$\text{Εφαπτομένη στο } M_2: y - y_1 = \lambda \cdot (x - x_1) \Rightarrow$$

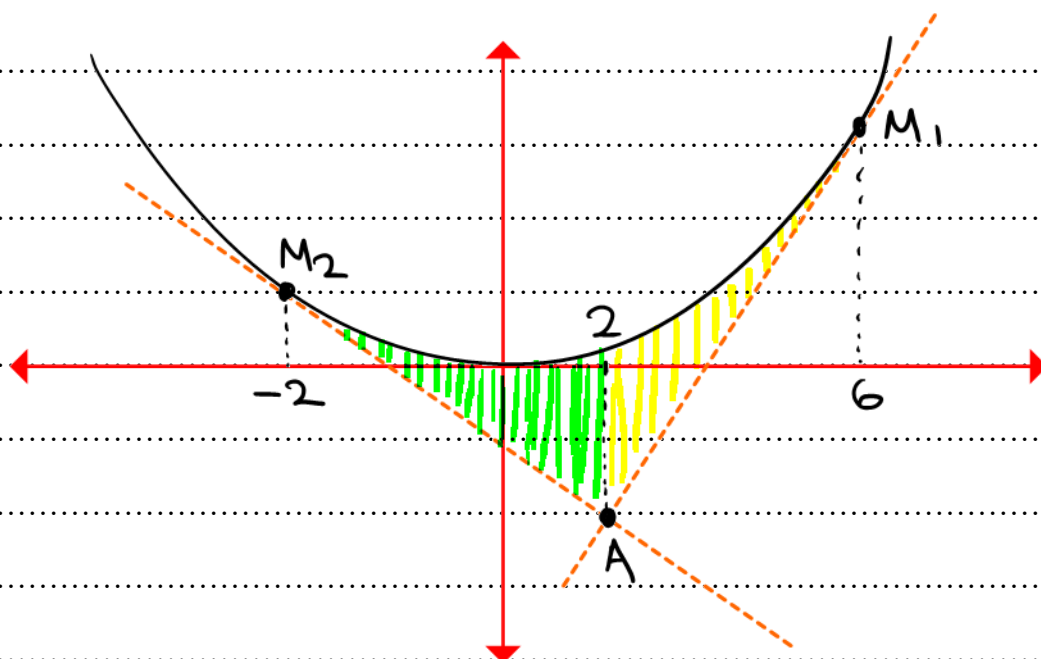
$$y - 1 = -1 \cdot (x + 2) \Rightarrow y - 1 = -x - 2 \Rightarrow y = -x - 1$$

$$\text{Σημείο Τομής: } \left. \begin{array}{l} y = 3x - 9 \\ y = -x - 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 3x - 9 = -x - 1 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\bullet \quad y = -x - 1 \Rightarrow y = -2 - 1 \Rightarrow y = -3, \quad A(2, -3)$$

(b)



$$\epsilon = \int_{-2}^2 \left[\frac{x^2}{4} - (-x-1) \right] dx + \int_2^6 \left[\frac{x^2}{4} - (3x-9) \right] dx \Rightarrow$$

$$\epsilon = \int_{-2}^2 \left(\frac{x^2}{4} + x + 1 \right) dx + \int_2^6 \left(\frac{x^2}{4} - 3x + 9 \right) dx \Rightarrow$$

$$\epsilon = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^2 + \left[\frac{x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + 9x \right]_2^6 \Rightarrow$$

$$\epsilon = \left(\frac{8}{12} + 2 + 2 \right) - \left(-\frac{8}{12} + 2 - 2 \right) + \left(\frac{6^3}{12} - 54 + 54 \right) -$$

$$- \left(\frac{8}{12} - 6 + 18 \right) \Rightarrow$$

$$\epsilon = \frac{8}{12} + 4 + \frac{8}{12} + \frac{216}{12} - \frac{8}{12} - 12 \Rightarrow$$

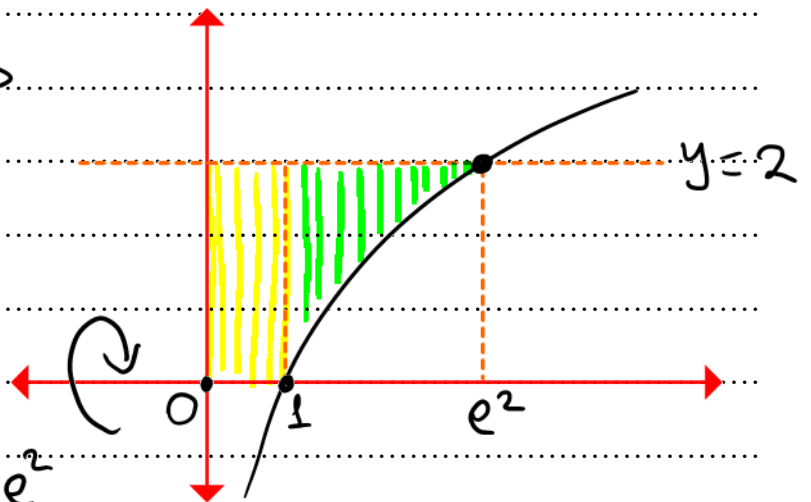
$$\epsilon = \frac{32}{3} \text{ ur}$$

Άσκηση 5.

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες την καμπύλη $y = \ln(x)$ και την ευθεία $y = 2$ στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των X .

$$\bullet y=2 \Rightarrow \ln(x)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=e^2$$



$$\bullet V = \pi \int_0^1 2^2 dx + \pi \int_1^{e^2} [2^2 - \ln^2 x] dx =$$

$$= \pi [4x]_0^1 + \pi \int_1^{e^2} 4 dx - \pi \int_1^{e^2} \underbrace{\ln^2(x)}_u dx =$$

$$= \pi(4-0) + \pi[4x]_1^{e^2} - \pi \left[(x \cdot \ln^2 x) - \int_1^{e^2} x d(\ln^2 x) \right] =$$

$$= 4\pi + \pi(4e^2 - 4) - \pi \left[e^2 \cdot 4 - 0 - \int_1^{e^2} x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \right]$$

$$= \cancel{4\pi} + \cancel{4\pi e^2} - \cancel{4\pi} - \cancel{4\pi e^2} + 2\pi \int_1^{e^2} \ln(x) dx =$$

$$= 2\pi \left[(x \cdot \ln x) - \int_1^{e^2} x d(\ln x) \right] =$$

$$= 2\pi \left[2e^2 - 0 - \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx \right] = 4\pi e^2 - 2\pi [x]_1^{e^2} =$$

$$= 4\pi e^2 - 2\pi(e^2 - 1) = 4\pi e^2 - 2\pi e^2 + 2\pi =$$

$$= (2\pi e^2 + 2\pi) \text{ κ.μ.}$$

Άσκηση 6.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a x \cdot f(x^2) dx = 0$$

$$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$x = -a \Rightarrow t = a^2, \quad x = a \Rightarrow t = a^2$$

$$\bullet \int_{-a}^a x \cdot f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x^2) \cdot 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{a^2} f(t) dt = 0$$

Άσκηση 7.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^\pi x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta \mu x) dx$ με χρήση του μετασχηματισμού $x = \pi - t$.

(β) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^\pi f(\eta \mu x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$ με χρήση του μετασχηματισμού $a - x = t$.

(δ) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να αποδείξετε ότι: $\int_0^\pi \frac{x \eta \mu^4 x}{\eta \mu^4 x + \sigma \nu \nu^4 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

$$(a) \quad x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt \\ t = \pi - x$$

$$x=0 \Rightarrow t=\pi, \quad x=\pi \Rightarrow t=0$$

$$\bullet I = \int_0^\pi x \cdot f(\eta \mu x) dx = - \int_\pi^0 (\pi - t) \cdot f(\eta \mu (\pi - t)) dt =$$

$$= \int_0^\pi (\pi - x) \cdot f(\eta \mu (\pi - x)) dx = \int_0^\pi (\pi - x) \cdot f(\eta \mu x) dx =$$

$$= \int_0^\pi \pi \cdot f(\eta \mu x) dx - \underbrace{\int_0^\pi x \cdot f(\eta \mu x) dx}_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \pi \int_0^\pi f(\eta \mu x) dx - I \Rightarrow 2I = \pi \int_0^\pi f(\eta \mu x) dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta \mu x) dx$$

$$(b) \quad \int_0^\pi f(\eta \mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\eta \mu x) dx}_{=}$$

$$t = n - x \Rightarrow x = n - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$x = \frac{n}{2} \Rightarrow t = n - \frac{n}{2} \Rightarrow t = \frac{n}{2}, \quad x = n \Rightarrow t = 0$$

$$= \int_0^{\frac{n}{2}} f(nx) dx - \int_{\frac{n}{2}}^0 f(n(n-t)) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{n}{2}} f(nx) dx + \int_0^{\frac{n}{2}} f(n(n-x)) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{n}{2}} f(nx) dx + \int_0^{\frac{n}{2}} f(nx) dx = 2 \int_0^{\frac{n}{2}} f(nx) dx$$

$$(\gamma) \quad t = a - x \Rightarrow x = a - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = a, \quad x = a \Rightarrow t = 0$$

$$A = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = - \int_a^0 \frac{f(a-t)}{f(a-t) + f(t)} dt =$$

$$= \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} dx = B \quad \text{Apex } A = B$$

$$\bullet \quad A + B = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} dx =$$

$$= \int_0^a \frac{f(x) + f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \int_0^a 1 dx = [x]_0^a = a - 0 = a$$

Apa $A+B=a \Rightarrow A+A=a \Rightarrow 2A=a \Rightarrow A=\frac{a}{2}$

$$(8) \bullet \int_0^n \frac{x \cdot w_n^4 x}{w_n^4 x + \sigma w^4 x} dx = \int_0^n x \cdot \frac{\overset{f(wx)}{\downarrow} w_n^4 x}{w_n^4 x + (1-w_n^2 x)^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int_0^n \frac{x \cdot w_n^4 x}{w_n^4 x + \sigma w^4 x} dx$$

$$\stackrel{(a)}{=} \frac{n}{2} \int_0^n \frac{w_n^4(x)}{w_n^4 x + \sigma w^4 x} dx \stackrel{(8)}{=} \frac{n}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{w_n^4(x)}{w_n^4(x) + \sigma w^4(x)} dx =$$

$$= n \cdot \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{w_n^4(x)}{w_n^4(x) + \sigma w^4(x)} dx \quad a = \frac{n}{2}, f(x) = w_n^4(x)$$

• $f(a-x) = f(\frac{n}{2}-x) = w_n^4(\frac{n}{2}-x) = \sigma w^4(x)$

Apa: $n \cdot \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{w_n^4(x)}{w_n^4(x) + \sigma w^4(x)} dx \stackrel{(8)}{=} n \cdot \frac{\frac{n}{2}}{2} = \frac{n^2}{4}$